Leçon 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Développements :

Théorème de Fourier-Plancherel, Intégrale de Dirichlet.

Bibliographie :

Candelpergher, Bernis, Gourdon, Nourdin, Briane Pagès, Pommellet.

Rapport du jury :

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme, ou de la convergence normale (dans le cas de séries de fonctions). À un niveau plus avancé, les théorèmes de convergence dominée, de convergence monotone et le théorème de Fubini (et Fubini-Tonelli) ont leur place dans cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces réultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion tant désirée. Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de Fourier et/ou de la transformée de Laplace.

1 Premiers contre exemples

Contre exemple 1. $f_n(x) = x/(n+x)$. *Interversion limite-limite ne marche pas.*

Contre exemple 2 (Candel p35). $f_n(x) = (1/n)1_{[0,n]}$. *On a convergence uniforme vers la fonction nulle mais interversion limite-intégrale ne marche pas.*

2 Premiers théorèmes d'interversion

2.1 Limites et convergence uniforme

Remarque 3. *La continuité et la dérivabilité sont des notions locales définies comme des limites, ce qui correspond parfaitement au cadre de la leçon.La continuité et la dérivabilité sont des notions locales définies comme des limites, ce qui correspond parfaitement au cadre de la leçon.*

Proposition 4 (Gourdon p222). *[Pommellet p187] Continuité de la limite d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément.*

Contre exemple 5 (Gourdon p220). $x \mapsto x^n$ *est continue et converge simplement vers* $1_{\{1\}}$ *qui n'est pas continue. Donc pas de convergence uniforme.*

Remarque 6 (Gourdon p226). *On peut avoir continuité sans convergence uniforme.*

Théorème 7 (Nourdin p73). *[Pomm p188] Si* (f_n) *converge uniformément vers* f *et chaque* f_n *possède une limite* b_n *en* a *et si* E *est complet alors* (b_n) *converge vers* b *et* f *tend vers* b *en* a.

Contre exemple 8. $x \mapsto x^n$ *sur* $[0,1]$, $\arctan(x/n)$, $\sin(\frac{nx}{n+x})$.

Exemple 9 (Gourdon). *Continuité de Zeta et limite.*

Proposition 10 (Gourdon p223). *[Candel p32] Intégration d'une suite de fonctions qui converge uniformément.*

Contre exemple 11 (Candel p32). *Ne marche pas avec de la convergence simple.*

Application 12 (Candel p35). *Application à la permutation d'une série de fonctions qui converge uniformément sur un segment.*
$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum n^{-n}$.

Exemple 13. $\int_0^1 (1-x/n)^n dx = 1 - \exp(-1)$.

Exemple 14 (Candel p39). $\int_0^1 \sin(nt)/(n+t)$ *tend vers* 0.

Remarque 15. *Le théorème donne des conditions nécessaires mais non suffisantes. La théorie de la mesure réduit les hypothèses. (*$x \mapsto x^n$*, ou* $\int_0^{\pi/2} sin(x)^n dx$.

Corollaire 16 (Gourdon p223). *Interversion des signes de sommation.*

Proposition 17 (Gourdon p223). *Dérivée de la fonction limite.*

Application 18 (Gourdon p224). *Dérivée d'une série de fonctions.*

Exemple 19 (Gourdon p224). $\exp$ *est* C^1.

Contre exemple 20 (Hauchecorne). $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $\sin(nx)/\sqrt{n}$

Exemple 21 (FGN 2 p115). $\sum \frac{x^n}{1-x^n}$ *dérivable sur* $]-1,1[$.

Application 22 (Bernis). *Equation de la chaleur.*

Exemple 23. *Zeta est* C^∞.

2.2 Le cas des séries entières

Proposition 24. *Il y a convergence normale sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.*

Proposition 25 (Gourdon p238)**.** *[OA] La somme d'une série entière est holomorphe sur son disque ouvert de convergence.*

Remarque 26. *On peut passer à la limite dans tout le cercle de convergence.*

Application 27. *Equation de Bessel.*

Application 28. *Calculs de DSE.*

Proposition 29 (Gourdon p239)**.** *Formule de Cauchy.*

Proposition 30 (Haichecorne)**.** *Problèmes au bord.*

Théorème 31. *Théorème d'Abel et taubérien faible.*

3 Interversion limites et intégrales avec la théorie de la mesure

3.1 Intégrales de suites et séries de fonctions

Théorème 32 (Briane p131)**.** *Beppo Levi.*

Exemple 33 (Briane p127)**.** *Convergence de la suite* $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 - x/n)^n \exp(\alpha x) dx$.

Exemple 34 (Nourdin p79)**.** *Expression de la fonction* Γ *en terme de limite. Application au prolongement (? Zuily Queffelec).*

Lemme 35 (Briane p131)**.** *Lemme de Fatou.*

Contre exemple 36. $f = 1_{[0,1]} - 1_{[n,n+1]}$.

Application 37 (Briane p132)**.** *Soit* (f_n) *suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers* f *et telle que* $sup_n \int |f_n| < +\infty$ *alors* f *est intégrable.*

Application 38 (Briane p133)**.** f *croissante sur* $[0,1]$ *continue en* 0 *et en* 1*, dérivable pp alors* $\int_0^1 f'(t)dt \leq f(1) - f(0)$*. L'inégalité peut être stricte.*

3.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 39 (Briane p134)**.** *Théorème de convergence dominée. (*L^1 *ou* L^p *?)*

Remarque 40. *On retrouve l'interversion quand il y a convergence uniforme.*

Remarque 41 (Briane p135)**.** $f(x+n)/n$ *: bosse glissante,ce théorème ne résout pas tous les problèmes.*

Exemple 42 (Nourdin p81)**.** $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^n dx$.

Exemple 43 (Candel p37)**.** $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-nx^3}}{1+x^2}$.

Application 44 (Briane p136)**.** *Intégration d'une dérivée.*

Proposition 45 (Briane p137)**.** *[Candel p186,p39] Théorème avec les séries de fonctions.*

Exemple 46 (Candel p39)**.** $\int_{\mathbb{R}+} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Remarque 47. *Une fois de plus les conditions sont suffisantes mais pas nécessaires.*
$(-1)^n exp(-(n+1)x)dx$.

Application 48 (Briane p138)**.** *Continuité de l'intégrale par rapport à la mesure.*

Proposition 49. *Formule des compléments*

3.3 Régularité des intégrales à paramètres

Remarque 50. *Continuité et dérivabilité sont des notions locales définies comme des limites.*

Proposition 51 (Briane p138)**.** *[Nourdin p81] Continuité sous l'intégrale à paramètres.*

Exemple 52. Γ *est continue.*

Proposition 53 (Briane p141)**.** *[Nourdin p81] Dérivabilité.*

Exemple 54. $\int \sin(xt)/t \exp(-t)dt$.

Exemple 55 (Bernis)**.** *Intégrale de Dirichlet.*

Application 56. Γ *est* C^∞.

Application 57 (Rouvière)**.** *Méthode de Laplace.*

Proposition 58 (Nourdin p82)**.** *Holomorphie sous l'intégrale.*

Exemple 59. Γ *se prolonge en une fonction holomorphe.*

Application 60 (Nourdin p82)**.** *Fonction caractéristique de la loi gaussienne.*

3.4 Application à la transformée de Fourier

Proposition 61. $F : L^1 \to C_0$.

Proposition 62. *Théorème d'inversion.*

Proposition 63. *Théorème de Fourier-Plancherel.*

Application 64 (Bernis)**.** *Intégrale de Dirichlet.*

4 Intégrales multiples : théorèmes de Fubini

Théorème 65 (Briane p217)**.** *Fubini-Tonelli.*

Application 66 (Briane p218)**.** $\int \frac{F(ax)-F(x)}{x} dx = \ln(a) \int f(x) dx$.

Application 67 (Briane)**.** *Volume de la boule unité.*

Théorème 68 (Briane p219)**.** *Fubini-Lebesgue.*

Contre exemple 69 (Briane p220)**.** $2\exp(-2xy) - \exp(-xy)$.

Application 70. $E[X] = \int_0^{+\infty} \P(X > t)dt$ *et inversion de Fourier en probabilité.*

Application 71 (Briane p244)**.** *Intégrale de Gauss.*

Théorème 72 (Briane p223)**.** *[Gourdon p208] Séries doubles.*

Exemple 73 (Gourdon p211)**.** $\sum(\zeta(k) - 1) = 1$.

Proposition 74 (Gourdon p208)**.** *Produit de Cauchy.*

Application 75 (FGN An1 p201)**.** $\sum \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.